УДК 517.984.54

Обратные задачи для оператора Штурма-Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева. Равномерная устойчивость.

А.М.Савчук, А.А.Шкаликов

Аннотация. *В работе изучаются две обратных задачи для оператора Штурма-Лиувилля $Ly = -y'' + q(x)y$ на отрезке $[0, \pi]$. С первой из них при $\theta \geqslant 0$ связано отображение $F : W_2^\theta \to l_B^\theta$, $F(\sigma) = \{s_k\}_1^\infty$, где $W_2^\theta = W_2^\theta[0, \pi]$ — пространство Соболева, $\sigma = \int q$ — первообразная потенциала q, а l_B^θ — специально построенное конечномерное расширение весового пространства l_2^θ, куда помещаются регуляризованные спектральные данные $\mathbf{s} = \{s_k\}_1^\infty$ для задачи восстановления по двум спектрам. Подробно изучаются свойства отображения F. Основной результат — теорема о равномерной устойчивости. Он состоит в доказательстве равномерных оценок и снизу и сверху нормы разности $\|\sigma - \sigma_1\|_\theta$ через норму разности регуляризованных спектральных данных $\|\mathbf{s} - \mathbf{s}_1\|_\theta$, где норма берется в l_B^θ. Аналогичный результат получен для второй обратной задачи, которая связана с восстановлением потенциала по спектральной функции оператора L, порожденного краевыми условиями Дирихле. Результат является новым и для классического случая $q \in L_2$, который отвечает значению $\theta = 1$.*

В этой работе мы изучим две классические обратные задачи для оператора Штурма-Лиувилля

$$Ly = -y'' + q(x)\,y, \qquad x \in [0, \pi], \tag{0.1}$$

на конечном интервале. Первая задача связана с восстановлением потенциала по двум спектрам этого оператора, порожденного краевыми условиями Дирихле и Дирихле-Неймана соответственно (мы называем ее задачей Борга). Вторая задача связана с восстановлением потенциала по спектральной функции этого оператора, порожденного краевыми условиями Дирихле (далее такой оператор называем оператором Дирихле). Давно известно решение этих задач для вещественных потенциалов $q \in L_2$, в частности, получена полная характеризация спектральных данных для потенциалов q из этого класса. Наша цель — решить эти задачи для потенциалов q из шкалы соболевских пространств W_2^α при всех фиксированных $\alpha \geqslant -1$ (включая случай $\alpha \in [-1, 0)$, когда потенциал является сингулярной функцией-распределением.) Важную роль при этом играют специальные гильбертовы пространства, которые мы конструируем для решения указанных задач. Эти пространства нужны для задания и изучения отображений, которые мы связываем с рассматриваемыми задачами, а также для полного описания (характеризации) спектральных данных, когда первообразная потенциала $\sigma = \int q(t)\,dt$ пробегает множество вещественных функций пространства $W_2^{\alpha+1}$.

После решения обратных задач возникает важная задача об априорных оценках: насколько мало изменяется первообразная потенциала q в норме пространства $W_2^{\alpha+1}$ при малом изменении спектральных данных в норме соответствующего гильбертова

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант № 10-01-00423 .

пространства, куда эти данные помещены. Априорные оценки ранее были известны в классическом случае (при $\alpha = 0$). Но это были оценки локального типа, в которых постоянные вместе с радиусом окрестности, где оценки действуют, зависели от потенциала q. Поэтому эффективность локальных оценок мала. *Основная цель этой работы — получить равномерные двусторонние априорные оценки не только для классического случая $\alpha = 0$, но и при всех $\alpha > -1$.* Случай $\alpha = -1$ особый. Развиваемый нами метод при $\alpha = -1$ не работает. Одновременно мы выясним, для каких спектральных данных константы в априорных оценках могут «портиться» (т.е. становиться большими или малыми). Такая информация важна для реализации конкретных вычислений при решении обратных задач. Мы покажем, что константы в априорных оценках «ухудшаются» только по двум причинам: 1) увеличение нормы регуляризованных спектральных данных, т.е. большие уклонения спектральных данных от нулевых значений (которые соответствуют нулевому потенциалу q); 2) уменьшение зазора (расстояния) между парами соседних собственных значений или приближение к нулю одного из нормировочных чисел (уменьшение числа h, которое фигурирует в определении множеств регуляризованных спектральных данных $\Omega^\theta_B(h,r)$ и $\Omega^\theta_D(h,r)$, определяемых в параграфах 2 и 3 работы). Отметим еще раз, что *эти оценки являются новыми и для классического случая потенциалов $q \in L_2$,* но метод доказательства оценок существенно использует предварительные результаты, полученные при изучении обратных задач для потенциалов q во всей шкале соболевских пространств W_2^α.

История изучения обратных задач для оператора Штурма–Лиувилля ведет начало от работы Амбарцумяна [**3**]. Но результат этой работы оказался не характерным для теории. Пионерскую роль сыграла фундаментальная работа Борга [**4**], основной результат которой — теорема единственности для восстановления потенциала по двум спектрам. Другую интерпретацию результатов Борга предложил Левинсон [**27**]. Тихонов [**49**] показал, что потенциал (при некоторых дополнительных условиях) восстанавливается единственным образом по функции Вейля–Титчмарша. Марченко [**32, 33**] первым применил в исследовании обратных задач оператор преобразования и доказал единственность решения обратной задачи по спектральной функции для операторов Штурма-Лиувилля, как на конечном интервале, так и на всей оси. Гельфанд и Левитан [**13**] нашли необходимые и достаточные условия для восстановления потенциала по спектральной функции и написали явные уравнения для решения задачи о восстановлении. Левитан [**28**], а также Гасымов и Левитан [**12**], получили аналогичные результаты для задачи Борга о восстановлении потенциала по двум спектрам. Полное решение задачи Борга для потенциалов из L_2 получил Марченко [**34**]. Другие формулы для решения обратных задач предложил Крейн [**25, 26**]. В серии работ Трубовица с соавторами был предложен метод для решения некоторых обратных задач на конечном интервале, использующий язык теории аналитических отображений. Детальное изложение имеется в книге Пошеля и Трубовица [**40**]. Из последних работ, развивающих этот метод, отметим работу Коротяева и Челкака [**24**]. Для решения нелинейных уравнений важную роль сыграла обратная задача по данным рассеяния, изучение которой было проведено Фаддеевым [**9, 10**], Дейфтом и Трубовицем [**6**], Марченко [**34**] (см. [**34**] для более полной информации). Большое число работ посвящено изучению прямых и обратных задач для операторов Штурма–Лиувилля в импедансной форме. Отметим, что имеется связь между такими операторами и обычными операторами Штурма-Лиувилля с

сингулярными потенциалами. Работа Альбеверио, Гринива и Микитюка [**1**] — одна из последних на эту тему; в ней имеются многочисленные ссылки.

В работе [**43**] авторы предложили метод регуляризации для определения оператора Штурма-Лиувилля с потенциалами-распределениями $q \in W_2^{-1}$. Гринив и Микитюк [**18, 21**] показали существование оператора преобразования для уравнений с такими потенциалами и дали решения классических обратных задач для потенциалов $q \in W_2^{-1}$ (см., в частности, [**19, 20, 22**]). Марченко и Островский [**36**], [**34**] дали описание спектральных данных задачи Борга для потенциалов q из пространств Соболева W_2^α при целых показателях гладкости $\alpha = 0, 1, 2, \dots$. Аналогичные результаты для обратных задач по спектральным функциям получили Фрайлинг и Юрко [**11**]. Авторы [**45**] ввели шкалу пространств $l_B^{\alpha+1}$ для изучения спектральных данных задачи Борга и в терминах этих пространств провели исследование этой задачи при всех показателях гладкости $\alpha \geqslant -1$. В других терминах и другим методом задачу Борга, а также обратную задачу по спектральной функции исследовали для показателей гладкости $\alpha \in [-1, 0]$ Гринив и Микитюк [**23**].

Различные априорные оценки локального характера для обратных задач получали многие авторы. Не вникая в детали, отметим, что в этом направлении результаты получили Марченко и Маслов [**35**], Рябушко [**41, 42**], Хохштадт [**17**], Хальд [**15**], Юрко [**50**] (см.также [**11**]), Мизутани [**39**], Алексеев [**2**], Мак Лафлин [**30**], Хитрик [**16**], Марлетта и Вайкард [**38**], Маламуд [**31**].

Говоря об обратных задачах на конечном интервале, необходимо упомянуть задачу о восстановлении потенциала по двум спектрам периодической и антипериодической задач. Естественно, она связана с изучением оператора Хилла на всей прямой. С этой задачей связано много интересных работ, и изучена она наиболее полно. Выделим важные результаты Марченко и Островского [**36**] и [**37**]. Обратная задача для периодического случая является единственной, для которой получены равномерные априорные оценки разности потенциалов через разность спектральных данных (см. [**37**]). Из последних публикаций о периодической задаче отметим работу Джакова и Митягина [**7**], где наряду с новыми важными результатами имеется подробная информация и библиография для случая классических потенциалов, а также их работу [**8**], где рассматриваются сингулярные потенциалы. Для более подробных сведений по рассматриваемым здесь и другим обратным задачам мы отсылаем читателя к монографиям Марченко [**34**], Левитана [**29**], Фрайлинга и Юрко [**11**], а также к обзорной работе Гештези [**14**].

Настоящая работа является продолжением серии работ авторов [**45**]–[**47**], посвященных решению обратных задач с потенциалами из пространств Соболева. В этих работах уже были сконструированы пространства, в которые следует помещать регуляризованные спектральные данные рассматриваемых двух обратных задач, и изучены свойства отображений, ставящих в соответствие первообразной потенциала $\sigma = \int q(t)\,dt$ регуляризованные спектральные данные. Ключевой является формулируемая ниже в нужной форме Теорема 1.3 о слабой нелинейности построенных отображений (эта теорема для разных задач доказана в работах [**46**]-[**47**]). Как уже говорилось, решение задачи Борга для потенциалов $q \in W_2^\alpha$ во всей шкале $\alpha \geqslant -1$ было дано авторами [**45**]. Инъективность доказывалась модификацией метода Борга, а для описания образа и процедуры восстановления развивались идеи работ Трубовица и соавторов. В этой работе мы дополним исследования [**45**] по задаче Борга, в частности, докажем локальную устойчивость для

всех индексов гладкости $\alpha \geqslant -1$. Мы покажем также, что решение в пространствах Соболева обратной задачи по спектральной функции оператора Дирихле для всех индексов $\alpha \geqslant -1$ может быть проведено по такой же схеме, как решение задачи Борга. Однако при реализации этой схемы доказательства некоторых похожих утверждений требуют новых подходов. *Но главная цель — равномерные априорные оценки, которые мы получаем при* $\alpha > -1$. Для их доказательства развивается новый метод, основанный на теоремах о слабой нелинейности построенных отображений.

Первый параграф работы носит вспомогательный характер. Мы напоминаем основные определения и конструкции пространств и формулируем в нужном виде необходимые для дальнейшего результаты работ [**45**]-[**47**]. Второй параграф основной. Здесь приводятся дополнения к результатам [**45**] по задаче Борга, доказываются локальные и равномерные априорные оценки для этой задачи. В третьем параграфе все результаты для задачи Борга переносятся на обратную задачу по спектральной функции оператора Дирихле.

1. Определения пространств и нелинейных отображений, связанных с обратными задачами. Теоремы о свойствах таких отображений.

Сначала напомним, что определение оператора Штурма-Лиувилля с классическим потенциалом $q \in L_1[0,\pi]$ можно распространить на случай потенциалов-распределений из соболевского пространства $W_2^{-1}[0,\pi]$. Предположим, что комплекснозначный потенциал q принадлежит соболевскому пространству $W_2^{\alpha}[0,\pi]$ при некотором $\alpha \geqslant -1$. Положим $\sigma(x) = \int q(x)\,dx$, где первообразная понимается в смысле теории распределений. Согласно [**43**] (см. также [**44**], где даны альтернативные определения), определим оператор Дирихле равенством

$$L_D y = Ly = -(y^{[1]})' - \sigma(x)y^{[1]} - \sigma^2(x)y, \quad y^{[1]}(x) := y'(x) - \sigma(x)y(x), \tag{1.1}$$

взяв в качестве области определения

$$\mathcal{D}(L_D) = \{y,\, y^{[1]} \in W_1^1[0,\pi] \ \mid \ Ly \in L_2[0,\pi],\ y(0) = y(\pi) = 0\}.$$

Оператор Дирихле–Неймана определим аналогично: $L_{DN}y = Ly$ на области

$$\mathcal{D}(L_{DN}) = \{y,\, y^{[1]} \in W_1^1[0,\pi] \ \mid \ Ly \in L_2[0,\pi],\ y(0) = y^{[1]}(\pi) = 0\}.$$

Для гладких функций σ правые части в (0.1) и (1.1) совпадают, и мы получаем в первом случае классический оператор Штурма–Лиувилля с краевыми условиями Дирихле, а во втором случае оператор с краевым условие $y(0) = 0$ и смешанным краевым условием $y'(\pi) - hy(\pi) = 0$, где $h = \sigma(\pi)$. В первом случае оператор не зависит от выбора константы в определении первообразной σ потенциала q, а во втором случае зависит. Если константу выбрать так, чтобы $\sigma(\pi) = 0$, то мы получим классический оператор Дирихле–Неймана.

Теперь определим спектральные данные для рассматриваемых в работе задач. Обозначим через $s(x,\lambda)$ единственное решение уравнения $Ly - \lambda y = 0$, удовлетворяющее условиям $s(0,\lambda) = 0$ и $s^{[1]}(0,\lambda) = \sqrt{\lambda}$ (известно [**43**], что такое решение существует и единственно). Очевидно, что нули $\{\lambda_k\}_1^\infty$ и $\{\mu_k\}_1^\infty$ целых функций $s(\pi,\lambda)/\sqrt{\lambda}$ и

$s^{[1]}(\pi,\lambda)/\sqrt{\lambda}$ являются собственными значениями операторов L_D и L_{DN} соответственно. В случае вещественного потенциала q все нули этих функций являются простыми и вещественными, и мы считаем их занумерованными так, чтобы обе последовательности были строго возрастающими. Для комплексных q нумерацию можно провести так, чтобы последовательности $\{|\lambda_k|\}_1^\infty$ и $\{|\mu_k|\}_1^\infty$ не убывали.

В задаче Борга потенциал восстанавливается по двум спектрам $\{\lambda_k\}$ и $\{\mu_k\}$ операторов L_D и L_{DN}. Задание этих двух спектров эквивалентно заданию чисел

$$s_{2k-1} = \sqrt{\mu_k} - (k - 1/2), \qquad s_{2k} = \sqrt{\lambda_k} - k, \qquad k = 1, 2, \dots,$$

т.е. последовательности $\{s_k\}_1^\infty = \{s_k(B)\}_1^\infty$. Будем говорить, что такая последовательность определяет *регуляризованные спектральные данные* задачи Борга. Здесь и далее мы подразумеваем, что в приведенных формулах ветвь квадратного корня выбрана так, что значения аргумента $\sqrt{\lambda}$ лежат в сегменте $(-\pi/2, \pi/2]$.

Известно [**28**, Гл.3], что спектральная функция оператора Дирихле однозначно восстанавливается по его собственным значениям и так называемым *нормировочным константам*, которые определяются равенствами

$$\alpha_k = \begin{cases} \int_0^\pi s^2(x,\lambda_k)\,dx, & \text{если } \lambda_k \neq 0; \\ \\ \int_0^\pi \left(\frac{s(x,\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\right)^2 dx\Big|_{\lambda=\lambda_k}, & \text{если } \lambda_k = 0. \end{cases}$$

Такое определение нормировочных чисел мы сохраним и для комплексных потенциалов. Последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty \cup \{\alpha_k\}_1^\infty$ формируют спектральные данные оператора L_D. Задание этих данных эквивалентно заданию чисел

$$s_{2k} = \sqrt{\lambda_k} - k, \qquad s_{2k-1} = \alpha_k - \pi/2, \qquad k = 1, 2, \dots, \tag{1.2}$$

Будем говорить,что последовательность $\{s_k\}_1^\infty = \{s_k(D)\}_1^\infty$ определяет *регуляризованные спектральные данные оператора* L_D.

Имеем две задачи: восстановить первообразную потенциала q по регуляризованным спектральным данным либо оператора L_D, либо задачи Борга. Ясно, что в сингулярном случае восстановление функции q невозможно и работать надо с ее первообразной $\sigma = \int q(x)\,dx$. При $q \in W_2^\alpha, \alpha \geqslant -1$ имеем $\sigma \in W_2^\theta$, где $\theta = \alpha + 1 \geqslant 0$. Случай классического потенциала $q \in L_2$ соответствует показателю $\theta = 1$. Нужно еще отметить, что переход к восстановлению первообразной меняет постановку задачи. Например, при восстановлении дифференцируемой функции σ по спектральным данным задачи Борга восстанавливается не только потенциал $q = \sigma'$, но и постоянная $h = \sigma(\pi)$ в смешанном краевом условии. Но по спектральным данным оператора L_D функция σ восстанавливается только с точностью до постоянной.

Чтобы далее использовать язык теории отображений, нужно понять, каким пространствам принадлежат определенные выше регуляризованные спектральные данные, когда первообразная σ пробегает соболевское пространство $W_2^\theta, \theta \geqslant 0$. Ясно, что эти пространства разные для рассматриваемых нами двух задач. Однако различаются они незначительно. Для обеих задач эти пространства можно выбрать, как конечномерные расширения обычных весовых l_2- пространств. Как расширять — становится ясным после анализа асимптотических формул для собственных значений λ_n, μ_n и нормировочных констант α_n. Подробно это объяснено в [**46**], [**47**]. Понять это можно также из

формулируемой ниже Теоремы 1.2 после интегрирования по частям формул, которыми определены операторы T_B и T_D.

Построим пространство для регуляризованных спектральных данных задачи Борга. Обозначим через l_2^θ весовое l_2-пространство, состоящее из последовательностей $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots\}$,комплексных чисел, таких, что

$$\|\mathbf{x}\|_\theta^2 := \sum_1^\infty |x_k|^2 \, k^{2\theta} < \infty.$$

Рассмотрим специальные последовательности

$$\mathbf{e}_{2s-1} = \{k^{-(2s-1)}\}_{k=1}^\infty, \qquad \mathbf{e}_{2s} = \{(-1)^k \, k^{-(2s-1)}\}_{k=1}^\infty, \qquad s = 1, 2, \dots.$$

Пусть $m = [\theta/2 + 3/4]$, где $[a]$ — целая часть числа a. Положим

$$l_B^\theta = l_2^\theta \oplus span\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^{2m}.$$

Здесь мы учли, что при $k \leqslant 2m$ последовательности $\mathbf{e}_k$ не принадлежат пространству l_2^θ, а при $k > 2m$ принадлежат. Таким образом, l_B^θ состоит из элементов $\mathbf{x} + \sum_{k=1}^m c_k \mathbf{e}_k$, где $\mathbf{x} \in l_2^\theta$, а $\{c_k\}_1^m$ — произвольные комплексные числа. Скалярное произведение элементов из l_B^θ определяется формулой

$$(\mathbf{x} + \sum_{k=1}^m c_k \mathbf{e}_k, \ \mathbf{y} + \sum_{k=1}^m d_k \mathbf{e}_k) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})_\theta + \sum_{k=1}^m c_k \overline{d_k}.$$

Построенное пространство свяжем с регуляризованными спектральными данными для оператора L_B. Хотя это пространство определено как конечномерное расширение весового пространства l_2^θ, его элементы удобнее записывать в форме обычных последовательностей. Например, при $3/2 \leqslant \theta < 5/2$ пространство l_B^θ состоит из последовательностей $\mathbf{x} = \{x_k\}_1^\infty$ с координатами

$$x_k = y_k + \alpha_1 k^{-1} + \alpha_2 (-1)^k k^{-1}, \quad \text{где} \ \ \{y_k\}_1^\infty \in l_2^\theta, \ \ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}.$$

Из такого представления легко следует, что пространство l_D^η компактно вложено в пространство l_D^θ при $\eta > \theta$ (здесь мы принимаем во внимание компактность вложения $l_2^\eta \hookrightarrow l_2^\theta$ при $\eta > \theta$).

Для построения пространства l_D^θ регуляризованных спектральных данных для оператора Дирихле нужно вместо последовательностей $\mathbf{e}_k$ использовать последовательности

$$\widehat{\mathbf{e}}_{2s-1} = \{\, 0, \ 2^{-(2s-1)}, \, 0, \ 4^{-(2s-1)}, \, 0, \ 6^{-(2s-1)}, \dots\}, \quad \widehat{\mathbf{e}}_{2s} = \{2^{-(2s)}, \, 0, \ 4^{-(2s)}, \, 0, \ 6^{-(2s)}, \dots\}.$$

Пространство l_D^θ определим равенством $l_D^\theta = l_2^\theta \oplus span\{\widehat{\mathbf{e}}_k\}_{k=1}^m$, где число m однозначно определено условием $m - 1/2 \leqslant \theta < m + 1/2$. Отметим, что в работе **[47]** конструкция пространства для регуляризованных спектральных данных оператора L_D^θ проводилась в пространстве двусторонних последовательностей. Здесь мы реализовали эквивалентную конструкцию в пространстве односторонних последовательностей, чтобы оба пространства выглядели единообразно.

Определим следующие нелинейные операторы:

$$F_B(\sigma) = \{s_k(B)\}_1^\infty, \quad F_D(\sigma) = \{s_k(D)\}_1^\infty. \tag{1.3}$$

Из результатов работ [**44**] и [**18**] следует, что последовательности, образованные из регуляризованных спектральных данных в правых частях равенств (1.3), являются последовательностями из l_2 для любой первообразной $\sigma = \int q(x)\,dx \in L_2(0,\pi)$. Поэтому все выписанные в (1.3) операторы корректно определены как операторы из L_2 в l_2. Более того, согласно результатам из [**45**] и [**47**], образы сужений этих операторов на соболевские пространства W_2^θ, $\theta > 0$, лежат в пространствах l_B^θ и l_D^θ соответственно. Именно для этой цели мы проводили расширения пространств l_2^θ. Без присоединения к l_2^θ специальных последовательностей соответствующий результат неверен.

Далее будут использоваться результаты работ [**45**]-[**47**], которые приведем в нужном нам виде.

Теорема 1.1 *При любом фиксированном $\theta \geqslant 0$ нелинейные операторы F_B и F_D корректно определены как операторы из пространства W_2^θ в l_B^θ и l_D^θ соответственно. Эти операторы дифференцируемы по Фреше в каждой точке (функции) σ при условии, что эта функция вещественнозначна и все собственные значения $\lambda_k(\sigma)$, $\mu_k(\sigma)$ не обращаются в нуль (для отображения F_D достаточно, чтобы не обращались в ноль только $\lambda_k(\sigma)$). В частности, эти операторы дифференцируемы по Фреше в точке $\sigma = 0$, причем производные по Фреше в этой точке суть линейные операторы T_B и T_D, которые определяются формулами*

$$(T_B\,\sigma)_k = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sigma(t)\sin(kt)\,dt, \quad k = 1,2,\dots .$$

$$\begin{cases} (T_D\,\sigma)_{2k-1} = -\int\limits_0^\pi (\pi - t)\sigma(t)\cos(2kt)\,dt, \quad k = 1,2,\dots, \\ (T_D\,\sigma)_{2k} = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \sigma(t)\sin(2kt)\,dt, \quad k = 1,2,\dots . \end{cases}$$

Доказательство этого утверждения для оператора F_B получается из Предложения 1 и Теоремы 6.1 работы [**46**], а для второго оператора — из Предложения 1 и Теоремы 4.2 работы [**47**]. $\square$

Теорема 1.2.*Пространства l_B^θ и l_D^θ образуют шкалу компактно вложенных друг в друга пространств, замкнутых относительно интерполяции, т.е. $[l^0,\, l^\theta]_\tau = l^{\theta\tau}$ при всех $\theta \geqslant 0, \tau \in [0,1]$ (здесь для краткости опущены нижние индексы B или D). При любом $\theta \geqslant 0$ оператор T_B изоморфно отображает пространство W_2^θ на l_B^θ. Оператор T_D изоморфно отображает пространство $W_2^\theta \ominus \{1\}$ на l_D^θ.*

Доказательство. Первое утверждение этой теоремы для пространства l_B^θ доказано в Предложении 4 работы [**46**]. Доказательство для пространства l_D^θ проходит без изменений. Второе утверждение для оператора T_B доказано в Лемме 1 работы [**46**], а для оператора T_D в Предложении 3 работы [**47**]. $\square$

Следующая теорема является наиболее существенным звеном в доказательстве основных результатов этой работы. В частности, она говорит, что рассматриваемые отображения F_B и F_D являются слабо нелинейными, т.е. компактными возмущениями линейных отображений. Важна также точная зависимость от θ показателя $\tau = \tau(\theta)$, который характеризует «качество» компактности.

Теорема 1.3. *При любом фиксированном $\theta \geqslant 0$ оператор F_B отображает пространство W_2^θ в l_B^θ и допускает представление вида*

$$F_B(\sigma) = T_B\ \sigma + \Phi_B(\sigma).$$

Здесь T_B — линейный оператор, определенный в Теореме 1.1, а Φ_B отображает пространство W_2^θ в l_B^τ, где

$$\tau = \begin{cases} 2\theta, & \text{если } 0 \leqslant \theta \leqslant 1, \\ \theta + 1, & \text{если } 1 \leqslant \theta < \infty. \end{cases}$$

Кроме того, отображение $\Phi_B : W_2^\theta \to l_B^\tau$ является ограниченным в любом шаре, т.е.

$$\|\Phi(\sigma)_B\|_\tau \le C(R), \quad \text{если } \|\sigma\|_\theta \le R,$$

где постоянная C зависит только от радиуса шара R. Аналогичное утверждение справедливо для оператора F_D. А именно,

$$F_D(\sigma) = T_D\ \sigma + \Phi_D(\sigma)$$

и отображение $\Phi_D : W_2^\theta \ominus \{1\} \to l_D^\tau$ обладает тем же свойством, что и Φ_B.

Доказательство этой теоремы для оператора F_B проведено в работе [**46**], а для второго оператора — в работе [**47**]. В случае $\theta > 0$ компактность нелинейных слагаемых в представлениях операторов F_B и F_D вытекает из компактности вложений $l^\eta \hookrightarrow l^\theta$ при условии $\eta > \theta$ (здесь мы опускаем для краткости индекс B, или D). Случай $\theta = 0$ особый. При $\theta = 0$ из сформулированной теоремы не вытекает компактность нелинейных слагаемых. $\square$

2. Задача Борга. Характеризация спектральных данных для первообразных σ вещественных потенциалов $q \in W_2^\alpha$. Равномерные априорные оценки.

В этом и следующем параграфе мы используем следующие обозначения. Через $W_{2,\mathbb{R}}^\theta$ обозначаем множество вещественных функций в пространстве W_2^θ, через $\mathcal{B}_\mathbb{R}^\theta(R)$ — замкнутый шар радиуса R в $W_{2,\mathbb{R}}^\theta$, через Γ_B^θ — множество всех функций в $W_{2,\mathbb{R}}^\theta$, для которых $\mu_1(\sigma) \geqslant 1/4$, и через $\mathcal{B}_\Gamma^\theta(R)$ — пересечение множества Γ_B^θ и шара $\mathcal{B}_\mathbb{R}^\theta(R)$. Здесь $\mu_1(\sigma)$ — первое собственное значение оператора L_{DN}. Число $1/4$ взято для определенности и простоты, вместо $1/4$ может фигурировать любое число $\eta > 0$, но тогда в (2.2) и (2.3) нужно писать $s_1 \geqslant \sqrt{\eta} - 1/2$.

Известно, что для вещественных потенциалов спектры $\{\lambda_k\}$ и $\{\mu_k\}$ операторов L_D и L_{DN} удовлетворяют условию перемежаемости

$$\mu_1 < \lambda_1 < \mu_2 < \lambda_2 < \dots < \mu_n < \lambda_n < \mu_{n+1} < \dots . \tag{2.1}$$

Для классических потенциалов этот факт известен давно (см., например, [**33**]), а для сингулярных потенциалов-распределений он доказан в [**20**] и в [**45**]. Заметим, что для положительных λ_k и μ_k неравенства (2.1) эквивалентны неравенствам для корней из этих чисел. Поэтому условия (2.1) вместе с условием $\mu_1 \geqslant 1/4$ (т.е. условием $\sigma \in \Gamma_B^0$) эквивалентны неравенствам

$$s_1 \geqslant 0, \qquad s_k - s_{k+1} < \frac{1}{2}, \qquad k = 1, 2, \dots, \tag{2.2}$$

где $\{s_k\} = \{s_k(B)\}$ — регуляризованные спектральные данные для задачи Борга. Последовательность $\{s_k\}_1^\infty$ принадлежит l_2, поэтому для любой фиксированной вещественной функции $\sigma \in L_2$ найдется число $h = h(\sigma) > 0$, такое, что

$$(2.3) \qquad s_1 \geqslant 0, \qquad s_k - s_{k+1} \leqslant \frac{1}{2} - h, \qquad k = 1, 2, \dots .$$

Фиксируем произвольные числа $r > 0$ и $h \in (0,\, 1/2)$. Обозначим через $\Omega_B^\theta(r,h)$ совокупность вещественных последовательностей $\{s_k\}_1^\infty$, для которых выполняются неравенства (2.3) и которые лежат в замкнутом шаре радиуса r пространства l_B^θ, т.е. $\|\{s_k\}\|_\theta \leqslant r$. Через Ω_B^θ обозначим множество всех вещественных последовательностей $\{s_k\}_1^\infty \in l_B^\theta$, для которых справедливы неравенства (2.2).

Напомним, что с задачей Борга мы связали оператор

$$F_B : W_2^\theta \to l_B^\theta, \qquad F_B(\sigma) = \{s_k\}_1^\infty,$$

где $\{s_k\}_1^\infty$ — регуляризованные спектральные данные задачи Борга. Из сказанного выше и Теоремы 1.3 следует, что F_B отображает Γ_B^θ в Ω_B^θ.

Далее в этом параграфе, там, где это удобно, *мы будем опускать индекс B*, так как будем работать только с задачей Борга. В частности, операторы F_B, T_B и Φ_B из Теоремы 1.3 обозначаем через F, T и Φ соответственно. Всюду вместо Γ_B^θ, Ω_B^θ и $\Omega_B^\theta(r,h)$ пишем Γ^θ, Ω^θ и $\Omega^\theta(r,h)$. Однако обозначение l_B^θ для пространств регуляризованных спектральных данных сохраняем прежним.

Теорема 2.1 *При любом фиксированном $\theta \geqslant 0$ отображение $F : \Gamma^\theta \to \Omega^\theta$ есть биекция.*

Доказательство. Инъективность отображения $F : \Gamma^\theta \to \Omega^\theta$ доказана в Лемме 6 работы [**45**]. В Лемме 5 этой же работы проведено доказательство и сюръективности этого отображения, но оно нуждается в дополнении в случае $\theta \geqslant 1/2$. При $\theta < 1/2$ пространство l_B^θ совпадает с l_2^θ, а при $\theta \geqslant 1/2$ содержит еще состоящее из специальных последовательностей подпространство $\mathcal{L}^{2m}$ размерности $2m$, где $m = [\theta/2 + 3/4]$. Познакомившись с доказательством Леммы 5 из [**45**], приходим к выводу, что для полного его завершения нужно уметь восстанавливать функцию σ (или доказывать ее существование), если варьируются только координаты подпространства $\mathcal{L}^{2m}$, а все координаты в l_2^θ остаются неизменными. Авторы не видят простого прямого решения этой задачи, без использования трудоемких теорем. Здесь мы приведем доказательство сюръективности с использованием Теоремы 1.3, основываясь на том, что при $\theta \in [0,\, 1/2)$ это свойство уже доказано.

Нам известно, что отображение $F : \Gamma^\theta \to \Omega^\theta$ сюръективно при $\theta \leqslant 1/4$. Покажем, что оно сюръективно при любом $\theta \in (1/4, 1/2]$. Возьмем произвольный элемент $\mathbf{y} \in \Omega^\theta \subset l_B^\theta$, $\theta \in (1/4, 1/2]$. Поскольку при $\theta = 1/4$ рассматриваемое отображение есть биекция, найдется единственная функция $\sigma \in \Gamma^{1/4}$, такая, что $F\sigma = \mathbf{y}$ (здесь мы учитываем вложение $l_B^\theta \hookrightarrow l_B^{1/4}$). В силу Теоремы 1.3 имеем $T\sigma = -\Phi\sigma + \mathbf{y} \in l_B^\theta$, так как $\mathbf{y} \in l_B^\theta$, а из условия $\sigma \in W_2^{1/4}$ следует, что $\Phi\sigma \in l_B^{1/2} \hookleftarrow l_B^\theta$. Но в силу Теоремы 1.2 линейный оператор $T : W_2^\theta \to l_B^\theta$ есть изоморфизм. Следовательно, $\sigma \in W_{2,\mathbb{R}}^\theta$, а потому с учетом включения $\mathbf{y} \in \Omega^\theta$ имеем $\sigma \in \Gamma^\theta$. Тем самым, мы доказали, что отображение сюръективно при $\theta \in (1/4, 1/2]$. Теперь, зная, что $F : \Gamma^\theta \to \Omega^\theta$ сюръективно при $\theta \in [0, 1/2]$, с помощью такого же приема покажем сюръективность при $\theta \in (1/2,\, 1]$. Повторив этот

же прием, с помощью Теоремы 1.3 покажем сюръективность при $\theta \in (1, 2]$. На $k+1$-м шаге получим сюръективность при $\theta \in (k-1, k]$. Здесь число k произвольно, поэтому утверждение справедливо при всех $\theta \geqslant 0$. Теорема доказана. $\square$

Обозначим через $\widehat{\Omega}_B^\theta$ множество последовательностей $\{s_k\}_1^\infty \in l_B^\theta$, для которых числа

$$\mu_k = (s_{2k-1} + k - 1/2)^2, \qquad \lambda_k = (s_{2k-1} + k - 1/2)^2$$

вещественны и подчинены условиям (2.1).

Заметим, что если к функции σ, которой определяются операторы L_D и L_{DN}, добавить функцию $c(x-\pi)$, то эти операторы перейдут в $L_D + c$ и $L_{DN} + c$ соответственно, т.е. их спектры сдвинутся на c. Положим

$$s_{2k-1}(c) = \sqrt{\mu_k + c} - (k - 1/2), \qquad s_{2k}(c) = \sqrt{\lambda_k + c} - k \tag{2.4}$$

Поскольку $c(x-\pi) \in W_2^\theta$ при всех $\theta \geqslant 0$, то $\{s_k(c)\}_1^\infty \in l_B^\theta$, если и только если $\{s_k(0)\}_1^\infty \in l_B^\theta$. Следовательно, $\{s_k\}_1^\infty \in \widehat{\Omega}^\theta$ если и только если найдется $c \geqslant 0$, такое, что $\{s_k(c)\}_1^\infty \in \Omega^\theta$. Из сделанных замечаний следует

Теорема 2.2. *Отображение $F : W_{2,\mathbb{R}}^\theta \to \widehat{\Omega}^\theta$ есть биекция. Последовательности чисел $\{\mu_k\}_1^\infty$ и $\{\lambda_k\}_1^\infty$ являются спектрами операторов L_D и L_{DN}, если и только если они удовлетворяют условиям перемежаемости* (2.1) *и $\{s_k\}_1^\infty \in l_B^\theta$.*

Отметим, что при натуральных $\theta = 1, 2, \ldots$ Марченко и Островский [**36**], [**34**] провели характеризацию спектральных данных для задачи Борга в другой форме, без использования пространств l_B^θ. Можно показать, что для таких значений θ их результат с учетом теоремы единственности Борга эквивалентен сформулированной теореме.

Далее существенно будут использоваться аналитические свойства отображения F. Мы предполагаем, что читатель знаком с определением производных по Фреше и Гато для отображения $F : U \to H$, где U — открытое множество в E, а E и H — сепарабельные гильбертовы пространства. Для комплексных гильбертовых пространств производная по Фреше естественно определяется в комплексном смысле. Отображение $F : U \to H$ называется аналитическим, если существует комплексная производная по Фреше в каждой точке $x \in U$. Производную по Фреше в точке x далее обозначаем через $F'(x)$. Естественным образом определяется понятие вещественного аналитического отображения, см., например, [**40**]. Отображение $F : U \to H$ называется слабо аналитическим, если в комплексном смысле дифференцируемы по Гато координатные функции $(F(x), e_k)$, где $\{e_k\}_1^\infty$ — ортонормированный базис пространства H. Известен результат [**40**], который значительно упрощает проверку аналитичности отображения.

Предложение 2.3. *Если $F : U \to H$ — слабо аналитическое отображение и локально ограничено в каждой точке $x \in U$, то F — аналитическое отображение.*

Далее мы будем работать с отображениями замкнутых множеств. Чтобы не делать дополнительных объяснений, всюду считаем, что отображение $F : D \to H$ аналитично на D, если найдется открытое множество U, такое, что $U \supset D$ и $F : U \to H$ аналитично.

Доказательство. Утверждения этой теоремы доказаны в параграфе 5 работы [**46**]. Доказательства основаны на Теореме 1.3 и Предложении 2.2, если предварительно вычислить производные координат. Здесь важно, что знаменатели в формуле (2.5) в случае вещественной функции σ не обращаются в ноль. Согласно [**43**] собственные функции

непрерывно зависят от первообразной потенциала σ, а потому числа $(y_k^2(x),1)$ не обращаются в ноль в некоторой комплексной окрестности (нужно еще учесть асимптотики y_k при $k\to\infty$)). Теорема остается справедливой, если вместо условия $\sigma\in\Gamma^\theta$ потребовать, чтобы σ была вещественной и среди чисел $\{\rho_k\}$ нет равных нулю. Однако в этом случае вместо вещественной аналитичности будет обычная.

Теорема 2.4. *Пусть $\theta\geqslant 0$ и $\sigma\in\Gamma^\theta$. Тогда найдется комплексная окрестность $U\in W_2^\theta$ точки σ, такая, что отображение $F:U\to l_B^\theta$ дифференцируемо в комплексном смысле во всех точках этой окрестности. Таким образом, отображение $F:\Gamma^\theta\to l_B^\theta$ является вещественно аналитическим. Этим же свойством обладает отображение $\Phi=F-T:\Gamma^\theta\to l_B^\tau$, где $T=T_B$ и τ определены в Теореме 1.3. Производная в точке $\sigma\in\Gamma$ определяется равенством*

$$[F'(\sigma)]f=\left\{-\frac{\left(y_k'(x)y_k(x),\overline{f(x)}\right)}{\rho_k\,(y_k^2(x),1)}\right\}_{k=1}^\infty. \tag{2.5}$$

Здесь $\rho_{2n-1}=\sqrt{\mu_n}$, $\rho_{2n}=\sqrt{\lambda_n}$, $y_{2n-1}(x)$ — собственные функции оператора L_{DN}, y_{2n} — собственные функции оператора L_D, а $f\in W_2^\theta$ — функция, на которую действует оператор $F'(\sigma)$.

Доказательство. Утверждения этой теоремы доказаны в параграфе 5 работы [**46**]. Доказательства основаны на Теореме 1.3 и Предложении 2.2, если предварительно вычислить производные координат. Здесь важно, что знаменатели в формуле (2.5) в случае вещественной функции σ не обращаются в ноль. Согласно [**43**], собственные функции непрерывно зависят от первообразной потенциала σ, а потому числа $(y_k^2(x),1)$ не обращаются в нуль в некоторой комплексной окрестности (нужно еще учесть асимптотики функций y_k при $k\to\infty$)). Теорема остается справедливой, если вместо условия $\sigma\in\Gamma^\theta$ потребовать, чтобы σ была вещественной и среди чисел $\{\rho_k\}$ не было равных нулю. Однако в этом случае вместо вещественной аналитичности будет обычная. □

Лемма 2.5. *Пусть функции $y_k(x)$, участвующие в Теореме 2.4, нормированы условиями $y_k^{[1]}(0)=1$. Тогда система функций*

$$\varphi_k(x)=\frac{2}{\pi}y_k'(x)y_k(x),\qquad k=1,2,\dots, \tag{2.6}$$

является базисом Рисса в пространстве $L_2(0,\pi)$. Биортогональная система к $\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ имеет вид

$$\psi_k(x)=\pi\rho_k^{1/2}y_k(x)w_k(x), \tag{2.7}$$

где при $k=2n$ функция w_k — решение уравнения $-y''+\sigma'y=\lambda_n y$ с начальными условиями

$$w_k^{[1]}(\pi)=0,\quad w_k(\pi)=\left(\int_0^\pi y_k^2(x)dx\cdot y_k^{[1]}(\pi)\right)^{-1},$$

а при $k=2n-1$ функция w_k есть решение уравнения $-y''+\sigma'y=\mu_n y$ с начальными условиями

$$w_k(\pi)=0,\quad w_k^{[1]}(\pi)=-\left(\int_0^\pi y_k^2(x)dx\cdot y_k(\pi)\right)^{-1}.$$

Доказательство. Первое утверждение теоремы о базисности Рисса системы $\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ доказано в Лемме 6 работы [**45**]. Там же доказаны соотношения $(\varphi_k(x), \psi_m(x)) = 0$ при $k \neq m$. Доказательство равенств $(\varphi_k(x), \psi_k(x)) = 1$ проводится прямыми вычислениями, которые мы здесь опускаем, так как далее конкретный вид функций φ_k и ψ_k не используется. $\square$

Теорема 2.6. *Пусть $\theta \geqslant 0$. Для каждой точки $\mathbf{y}_0 \in \Omega^\theta = F(\Gamma^\theta)$ существует ее комплексная окрестность $U(\mathbf{y}_0)$, в которой определено обратное отображение $F^{-1}(\mathbf{y})$ и в которой это отображение имеет комплексную производную по Фреше. Эта производная имеет вид*

$$\left(F^{-1}\right)'(\mathbf{y}) = (F')^{-1}(\mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{\infty} s_k \widetilde{\psi}_k(x), \qquad \mathbf{y} = (s_1, s_2, \dots). \tag{2.8}$$

Здесь $\widetilde{\psi}_k(x) = \gamma_k \psi_k(x)$, где $\{\psi_k(x)\}_1^\infty$ — биортогональная система из Леммы 2.6, а $\gamma_k = \rho_k \int_0^1 y_k^2(x)\,dx$.

Доказательство. Пусть сначала $\theta > 0$. Имеем

$$F'(\sigma_0) = T + \Phi'(\sigma_0), \qquad \mathbf{y}_0 = F(\sigma_0).$$

Согласно Теореме 1.2, оператор $T : W_2^\theta \to l_B^\theta$ — изоморфизм, а в силу Теоремы 2.4 оператор $\Phi'(\sigma_0) : W_2^\theta \to l_B^\tau$ ограничен, а потому оператор $\Phi'(\sigma_0) : W_2^\theta \to l_B^\theta$ компактен. Следовательно, $F'(\sigma_0)$ — фредгольмов оператор, а потому он обратим, если его ядро нулевое. Из формул (2.5) и полноты системы (2.6) в пространстве L_2 следует, что равенство $F'(\sigma_0)f = 0$ при $f \in L_2$ влечет $f = 0$. Тем более это так, если $f \in W_2^\theta$ при $\theta > 0$. Формула (2.8) теперь получается непосредственной проверкой. Достаточно проверить равенство

$$F'(\sigma_0)\left(F^{-1}\right)'(\mathbf{y}_0) = \mathbf{y}_0.$$

Оно сразу следует из (2.5) и (2.8) с учетом взаимной биортогональности систем $\{\gamma_k^{-1}\varphi_k\}_1^\infty$ и $\{\gamma_k\psi_k\}_1^\infty$.

Пусть теперь $\theta = 0$. Из асимптотических формул для собственных значений ρ_k^2 и собственных функций y_k, полученных в [**44**, Теоремы 2.6 и 2.7], сразу следует, что $\gamma_k \asymp 1$, если функции y_k нормированы условием $y_k^{[1]}(0) = 1$. Поэтому из Леммы 2.5 вытекает, что система $\{\widetilde{\psi}_k\}_1^\infty$ — базис Рисса. Тогда ограниченность оператора $(F')^{-1}(\mathbf{y}_0)$, определенного формулой (2.8), следует из определения базиса Рисса. Существование обратного оператора при любом $\theta \geqslant 0$ в малой комплексной окрестности точки $\mathbf{y}_0$ и его комплексная дифференцируемость следует из теоремы об обратном отображении. Теорема доказана. $\square$

Отметим, что из теоремы 2.6 сразу получаются локальные оценки разности потенциалов через разность спектральных данных и наоборот. Как отмечено во введении, для классического случая $\theta = 1$ ($q \in L_2$) имеется много работ на эту тему, выполненными различными методами и в разной форме. Однако изучались отображения $q \to \{\text{спектральные данные}\}$, мы же изучаем отображение $\int q(t)\,dt = \sigma \to \{\text{спектральные данные}\}$, поэтому возникающие у нас системы и формулы имеют другой вид.

Далее мы покажем, что при $\theta > 0$ с помощью Теоремы 1.3 можно получить существенно более сильный результат, избегая технической работы с системами функций.

Лемма 2.7. *Фиксируем $\theta > 0$. Пусть R произвольное положительное число и $\mathcal{B}^\theta_\Gamma(R) = \Gamma \cap \mathcal{B}^\theta_\mathbb{R}(R)$. Тогда найдутся положительные числа $r = r(R), h = h(R)$, такие, что*

$$F(\mathcal{B}^\theta_\Gamma(R)) \subset \Omega^\theta(r,h).$$

Доказательство. Если $\|\sigma\|_\theta \leqslant R$, $\sigma \in \Gamma^\theta$, то из Теоремы 1.3 следует, что $F\sigma = \mathbf{y} \in \Omega^\theta(r)$, где $r = r(R)$ зависит от R, но не от σ. Остается показать, что для всех элементов $\mathbf{y} = F\sigma$, $\sigma \in \mathcal{B}^\theta_\Gamma(R)$, выполняются неравенства (2.3) при некотором $h = h(R) > 0$, зависящем от R, но не от σ.

Заметим, что найдется число $N = N(\theta, r)$, такое, что для всех $\mathbf{y} = (s_1, s_2, \dots) \in \Omega^\theta(r)$ и всех $k \geqslant N$ выполняются неравенства $s_{k+1} - s_k \leqslant 1/4$ (здесь вместо $1/4$ можно взять любое число $\varepsilon > 0$). Это утверждение сразу следует из определения нормы в l^θ_B при $\theta > 0$ (см. подробнее § 5 работы [**46**]; при $\theta = 0$ это утверждение не справедливо). Теперь, допустим, что утверждение теоремы неверно и найдутся элементы $\mathbf{y}^n = F\sigma_n$, $\sigma_n \in \mathcal{B}^\theta_\Gamma(R)$, такие, что $s^n_k - s^n_{k+1} \to 1/2$ при $n \to \infty$ и некотором фиксированном $1 \leqslant k < N$ (здесь s^n_k — координаты элементов $\mathbf{y}^n$.) Шар в пространстве W^θ_2 слабо компактен, поэтому из последовательности функций σ_n можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность. Не ограничивая общности, считаем, что сама эта последовательность слабо сходится к функции $\sigma \in W^\theta_{2,\mathbb{R}}$. Так как пространство W^θ_2 компактно вложено в L_2, то последовательность σ_n сильно сходится к σ в норме L_2. Пусть индекс k, при котором $s^n_k - s^n_{k+1} \to 1/2$, является, например, четным, $k = 2p$. Тогда $\lambda_p(\sigma_n) - \mu_{p+1}(\sigma_n) \to 0$. Согласно Теореме 2 работы [**43**], сходимость функций σ_n в L_2 влечет за собой сходимость собственных значений, т.е. $\lambda_p(\sigma_n) \to \lambda_p(\sigma), \mu_{p+1}(\sigma_n) \to \mu_{p+1}(\sigma)$. Поэтому $s^n_k - s^n_{k+1} \to 1/2$ влечет $\lambda_p(\sigma) = \mu_{p+1}(\sigma)$, что невозможно в силу условия перемежаемости (2.1). Лемма доказана.

Лемма 2.8. *Пусть $\theta > 0$. Справедливо обратное утверждение к Лемме 2.7: для любых чисел r и h найдется число $R > 0$, такое, что*

$$F^{-1}(\,\Omega^\theta(r,h)) \subset \mathcal{B}^\theta_\Gamma(R).$$

Справедливо представление

$$F^{-1} = T^{-1} + \Psi, \qquad \Psi : \Omega^\theta \to W^\tau_2,$$

где число τ определено в Теореме 1.3. Отображение $\Psi : \Omega^\theta \to W^\tau_2$, аналитично, причем

$$\|\Psi\mathbf{y}\|_\tau \leqslant C\|\mathbf{y}\|_\theta \qquad \text{для всех } \mathbf{y} \in \Omega^\theta(r,h), \tag{2.9}$$

где постоянная C зависит только от r и h.

Доказательство. Если первое утверждение леммы неверно, то найдутся элементы $\mathbf{y}^n \in \Omega^\theta(r,h)$, такие, что $F^{-1}\mathbf{y}^n = \sigma_n$, $\|\sigma_n\|_\theta \to \infty$. Для определенности будем считать, что $\theta \in (0,1]$. При $\theta > 1$ доказательство не меняется, нужно только, согласно Теореме 1.3, число $\theta/2$ заменить на $\theta - 1$. Выделим из последовательности $\mathbf{y}^n$ слабо сходящуюся подпоследовательность в пространстве l^θ_B. Считаем что сама последовательность слабо сходится к некоторому элементу $\mathbf{y} \in l^\theta_B$. Из слабой сходимости следует покоординатная сходимость. Тогда из определения множества $\Omega^\theta(h,r)$ и его замкнутости следует, что $\mathbf{y} \in \Omega^\theta(h,r)$. В силу Теоремы 2.1 найдется функция $\sigma \in \Gamma^\theta$, такая, что $F\sigma = \mathbf{y}$. Из слабой сходимости $\mathbf{y}^n \rightharpoonup \mathbf{y}$ в l^θ_B следует сильная сходимость $\mathbf{y}^n \to \mathbf{y}$ в норме $l^{\theta/2}_B$, а из аналитичности (достаточно непрерывности) отображения $F^{-1} : \Omega^{\theta/2} \to \Gamma^{\theta/2}$ следует,

что $\|\sigma_n - \sigma\|_{\theta/2} \to 0$. В силу Теоремы 1.3 имеем $\|\Phi\sigma_n\|_\theta \leqslant \|\sigma_n\|_{\theta/2} \leqslant C$. Но тогда (опять используем Теорему 1.3 и свойство ограниченности слабо сходящейся последовательности) имеем

$$\|T\sigma_n\|_\theta \leqslant \|\Phi\sigma_n\|_\theta + \|\mathbf{y}^n\|_\theta \leqslant C + C = 2C.$$

Поскольку оператор $T : W_2^\theta \to l_B^\theta$ есть изоморфизм, то $\|\sigma_n\|_\theta \leqslant 2C$. Это противоречие завершает доказательство первого утверждения леммы.

Очевидно, что $\Psi = -T^{-1}\Phi F^{-1}$. Следовательно, отображение $\Psi : \Omega^\theta \to W_2^\tau$ является аналитическим как композиция аналитических отображений. Из первого утверждения леммы и равномерной ограниченности в каждом шаре отображения $\Phi : \Omega^\theta \to W_2^\tau$ получаем оценку $\|\Psi\mathbf{y}\|_\tau \leqslant C$ для всех $\mathbf{y} \in \Omega^\theta(r, h)$. Из равенства $\Psi(0) = 0$ и аналитичности отображения Ψ получаем оценку (2.9). Лемма доказана. $\square$

Следующее утверждение является совсем простым, но нам удобно его отдельно сформулировать.

Лемма 2.9. *Пусть X, X_1 — метрические пространства, X полно и функция $\Phi : X \to X_1$ непрерывна на X. Если множество $U \subset X$ предкомпактно в X, то $\Phi : U \to X_1$ равномерно непрерывна и равномерно ограничена.*

Доказательство. В условиях леммы замыкание $\overline{U}$ является компактом в X, а функция $\Phi : \overline{U} \to X_1$ непрерывна. Поэтому утверждение следует из свойств непрерывных функций на компактах. $\square$

Лемма 2.10. *Пусть $\theta > 0$. При любом $R > 0$ справедлива оценка*

$$\|F'(\sigma)\|_\theta \leqslant C, \qquad \text{для всех } \ \sigma \in \mathcal{B}_\Gamma^\theta(R), \tag{2.10}$$

где постоянная C зависит от R, но не зависит от σ.

Доказательство. Не ограничивая общности, считаем, что $\theta \in (0, 1]$. Если $\theta > 1$, то далее число $\theta/2$ нужно заменять на $\theta - 1$. Поскольку $F' = \Phi' + T$, достаточно доказать оценку (2.10), в которой вместо F участвует Φ. Согласно Теореме 2.3, отображение $\Phi : W^{\theta/2} \to l_B^\theta$ аналитично на замкнутом множестве $\mathcal{B}_\Gamma^{\theta/2}(R_1)$ при любом $R_1 > 0$, а потому числовая функция $\|\Phi'(\sigma)\|_\theta$ непрерывна на этом множестве. Из непрерывности вложения $W_2^\theta \hookrightarrow W_2^{\theta/2}$ следует, что найдется число $R_1 = R_1(R, \theta)$, такое, что $\mathcal{B}_\Gamma^\theta(R) \subset \mathcal{B}_\Gamma^{\theta/2}(R_1)$. Здесь первое множество компактно во втором, поэтому из Леммы 2.9 следует оценка (2.10), в которой F надо заменить на Φ. Лемма доказана. $\square$

Лемма 2.11. *Пусть $\theta > 0$. При любых $r > 0,\ h \in (0,\, 1/2)$ для обратного отображения справедлива оценка*

$$\|(F^{-1})'(\mathbf{y})\| \leqslant C, \qquad \text{для всех } \mathbf{y} \in \Omega^\theta(r, h), \tag{2.11}$$

где постоянная C зависит от r и h, но не зависит от $\mathbf{y}$.

Доказательство. Для определенности рассматриваем случай $\theta \in (0, 1]$. Рассуждаем аналогично. Фиксируем числа $r > 0,\ h \in (0,\, 1/2)$. Используя непрерывность вложения $l_B^\theta \hookrightarrow l_B^{\theta/2}$ найдем число r_1, такое, что $\Omega^\theta(r, h) \subset \Omega^{\theta/2}(r_1, h)$. Согласно Лемме 2.8, отображение

$$\Psi = -F^{-1}\Phi T^{-1} : \Omega^{\theta/2}(r_1, h) \to W_2^\theta$$

аналитично. Поэтому числовая функция $\|\Psi'(\mathbf{y})\|_\theta$ непрерывна при $\mathbf{y}\in\Omega^{\theta/2}(r_1,h)$. Воспользовавшись Леммой 2.9 и компактностью вложения $\Omega^\theta(r,h)\subset\Omega^{\theta/2}(r_1,h)$, получим оценку (2.11) в которой F^{-1} заменено на Ψ. Поскольку $F^{-1}=T^{-1}+\Psi$, оценка сохраняется для F^{-1}. Лемма доказана. $\square$

Теперь мы можем доказать основной результат этого параграфа.

Теорема 2.12. *Фиксируем $\theta>0$. Пусть последовательности $\mathbf{y},\mathbf{y}_1$ регуляризованных спектральных данных лежат в $\Omega^\theta_B(r,h)$. Тогда прообразы $\sigma=F_B^{-1}\mathbf{y}$, $\sigma_1=F_B^{-1}\mathbf{y}_1$ лежат в $\mathcal{B}^\theta_\Gamma(R)$ и справедливы оценки*

$$C_1\|\mathbf{y}-\mathbf{y}_1\|_\theta\leqslant\|\sigma-\sigma_1\|_\theta\leqslant C_2\|\mathbf{y}-\mathbf{y}_1\|_\theta, \tag{2.12}$$

где число R и постоянные C_1,C_2 зависят только r и h. Число R и постоянные C_2,C_1^{-1} увеличиваются при $r\to\infty$ или $h\to 0$. Обратно, если σ,σ_1 лежат в шаре $\mathcal{B}^\theta_{\mathbb{R}}(R)$, то последовательности $\mathbf{y},\mathbf{y}_1$ регуляризованных спектральных данных этих функций лежат в $\Omega^\theta(r,h)$ и справедливы оценки

$$C_1\|\sigma-\sigma_1\|_\theta\leqslant\|\mathbf{y}-\mathbf{y}_1\|_\theta\leqslant C_2\|\sigma-\sigma_1\|_\theta. \tag{2.13}$$

Здесь числа $r>0$, $h\in(0,1/2)$ и постоянные C_1 и C_2 зависят только от R. Числа r, h^{-1},C_2 и C_1^{-1} увеличиваются при $R\to\infty$.

Доказательство. Заметим, что множество $\Omega^\theta(r,h)$ выпукло. Для дифференцируемых функций на выпуклых множествах справедлив аналог теоремы Лагранжа (см., например, [**5**, Следствие 12.2.8 гл. 12])

$$\|\sigma-\sigma_1\|\leqslant\sup_{0<t<1}\|(F^{-1})'(t\mathbf{y}+(1-t)\mathbf{y}_1)\|\ \cdot\ \|\mathbf{y}-\mathbf{y}_1\|.$$

Тогда Лемма 2.11 влечет за собой оценку сверху в неравенстве (2.12). Оценки сверху в (2.13) получаются аналогично из леммы 2.10. Оценки снизу в (2.12) и (2.13) теперь следуют из оценок сверху и лемм 2.7 и 2.8. Теорема доказана. $\square$

Множества $\mathcal{B}^\theta_\Gamma(R)$ в Теореме 2.12 можно заменить обычными шарами $\mathcal{B}^\theta_{\mathbb{R}}(R)$, но тогда регуляризованные спектральные данные нужно определить формулой (2.4), где постоянная c такова, что для всех $\sigma\in\mathcal{B}^\theta_{\mathbb{R}}(R)$ выполнена оценка $c\geqslant-\mu_1(\sigma)-1/4$. В силу теоремы 3.1 такая постоянная, зависящая только от R, существует. Это замечание вытекает из того, что при добавлении к σ функции $c(x-\pi)$ спектры операторов L_D и L_{DN} сдвигаются на c, а разность функций σ, $\sigma_1\in\mathcal{B}^\theta_{\mathbb{R}}(R)$ совпадает с разностью функций $\sigma+c(x-\pi)$, $\sigma_1+c(x-\pi)\in\mathcal{B}^\theta_\Gamma(R)$.

3. Задача восстановления оператора L_D по его спектральной функции. Характеризация спектральных данных и равномерные априорные оценки.

Общая схема доказательства аналогичных результатов для задачи восстановления оператора L_D по его спектральной функции остается прежней, хотя доказательства схожих по формулировке лемм проводятся по другому. В ходе изложения мы сформулируем две леммы (Леммы 3.1 и 3.6), доказательство которых носит технический

характер. В виду ограничения объема статьи мы укажем только путь, на котором получаются доказательства, а детали и подробные выкладки читатель может найти в нашей электронной публикации [**48**].

Далее удобнее работать не с пространством $W_2^\theta \ominus \{1\}$, а с фактор-пространством $W_2^\theta/\{1\}$, считая, что все функции из W_2^θ определены с точностью до константы. Подразумеваем, что скалярное произведение функций $f, g \in W_2^\theta/\{1\}$ определено равенством $(f,g)_\theta = (f_0, g_0)_\theta$, где $f_0, g_0 \in W_2^\theta \ominus \{1\}$. Обозначим через Γ_D^θ множество вещественных функций $\sigma \in W_2^\theta/\{1\}$, для которых $\lambda_1(\sigma) \geqslant 1/2$, а через $\mathcal{B}_\Gamma^\theta(R)$ — пересечение множества Γ_D^θ с замкнутым шаром $\mathcal{B}_\mathbb{R}^\theta(R)$. Если $\sigma \in \Gamma_D^\theta$, то собственные значения оператора L_D подчинены условиям $1/2 \leqslant \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$. Для регуляризованных спектральных данных эти неравенства эквивалентны следующим:

$$s_2 \geqslant 0, \qquad s_{2k} - s_{2k+2} < 1, \qquad k = 1, 2, \dots. \tag{3.1}$$

Условия неотрицательности всех нормировочных чисел эквивалентны условиям

$$s_{2k-1} > -\pi/2, \qquad k = 1, 2, \dots. \tag{3.2}$$

Последовательность $\{s_k\}_1^\infty$ принадлежит l_2, поэтому для любой вещественной функции $\sigma \in \Gamma_D^\theta$ найдется число $h = h(\sigma) > 0$, такое, что

$$s_2 \geqslant 0, \qquad s_{2k} - s_{2k+2} \leqslant 1 - h, \qquad s_{2k-1} \geqslant -\pi/2 + h, \qquad k = 1, 2, \dots. \tag{3.3}$$

Фиксируем произвольные числа $r > 0$ и $h \in (0, 1)$. Обозначим через $\Omega_D^\theta(r, h)$ совокупность вещественных последовательностей $\{s_k\}_1^\infty$, для которых выполнены неравенства (3.3) и которые лежат в замкнутом шаре радиуса r пространства l_D^θ, т.е. $\|\{s_k\}\|_\theta \leqslant r$. Через Ω_D^θ обозначим множество всех вещественных последовательностей $\{s_k\}_1^\infty \in l_D^\theta$, для которых справедливы неравенства (3.1) и (3.2). Далее мы работаем только с отображением F_D и, где удобно, *будем опускать индекс D*. Вместо Γ_D^θ, Ω_D^θ и $\Omega_D^\theta(r,h)$ всегда будем писать Γ^θ, Ω^θ и $\Omega^\theta(r,h)$ соответственно.

Для доказательства аналогов Теорем 2.1 и 2.2 нам понадобится следующий важный результат, который дает явное описание прообраза отображения F_D при изменении только одной из координат в пространстве l_D^θ. Похожие формулы для задачи восстановления по одному спектру имеются в книге [**40**]. Но доказательство нашего результата проводится на другом пути.

Лемма 3.1 *Пусть $\{\lambda_k\}$ и $\{\alpha_k\}$ — собственные значения и нормировочные числа оператора L_D с вещественной функцией $\sigma \in W_2^\theta \in \Gamma^\theta$, $\theta \geq 0$. Тогда для любого фиксированного $n \geq 1$ и для любого $t \in (\lambda_{n-1} - \lambda_n, \lambda_{n+1} - \lambda_n)$ существует функция $\sigma(x,t) \in W_2^\theta$, такая, что соответствующий оператор $L_D = L_D(\sigma)$ имеет спектр $\{\lambda_k + t\delta_{kn}\}_1^\infty$ (здесь δ_{kn} — символ Кронекера) и нормировочные числа $\{\alpha_k\}$. Далее, для любого фиксированного $n \geq 1$ и для любого $t \in (-\alpha_n, +\infty)$ существует функция $\sigma(x,t) \in W_2^\theta$, такая, что оператор L_D, построенный по этой функции, имеет спектр $\{\lambda_k\}_1^\infty$ и нормировочные числа $\{\alpha_k + t\delta_{kn}\}_1^\infty$.*

Доказательство. Потенциал $\sigma(x,t)$ можно выписать в явном виде. В первом случае, когда меняется собственное значение λ_n, а нормировочные числа и все другие собственные значения остаются неизменными, положим

$$\sigma_n(x,t) = \sigma(x) - 2\tfrac{d}{dx}\ln G(x,t), \tag{3.4}$$

где

$$(3.5)\quad G(x,t)=\left(1+\alpha_n^{-1}\int_0^x y^2(\xi,\lambda_n+t)\,d\xi\right)\left(1-\alpha_n^{-1}\int_0^x y^2(\xi,\lambda_n)\,d\xi\right) + \left(\alpha_n^{-1}\int_0^x y(\xi,\lambda_n+t)y(\xi,\lambda_n)\,d\xi\right)^2.$$

Здесь $y(x,\lambda)$ — решение уравнения $-y''+\sigma' y=\lambda y$ с начальными условиями $y(0,\lambda)=0$, $y^{[1]}(0,\lambda)=\sqrt{\lambda}$. Во втором случае, когда меняется только одно нормировочное число α_n, положим

$$(3.6)\quad \sigma_n(x,t)=\sigma(x)-2\tfrac{d}{dx}\ln G(x,t),\qquad \text{где}\quad G(x,t)=1+((\alpha_n+t)^{-1}-\alpha_n^{-1})\int_0^x y^2(\xi,\lambda_n)\,d\xi.$$

Выписанные формулы получаются, если написать уравнение Гельфанда–Левитана–Марченко в том виде, в котором оно получено для потенциалов–распределений Гринивым и Микитюком [**19**]. Если искать решения этого уравнения, удовлетворяющие условиям леммы, в виде линейной комбинации двух функций (ср. [**29**, стр. 49-50]), то получается система двух линейных уравнений, которая решается явно. Подробности можно найти в [**48**]. $\square$

Лемма 3.2. *При любых $\theta\geqslant 0$ отображение $F_D:\Gamma^\theta\to\Omega_D^\theta$ сюръективно.*

Доказательство. Сначала докажем лемму при $\theta<1/2$, когда пространство l_D^θ совпадает с l_2^θ. Воспользуемся приемом из [**40**]. Согласно Теоремам 1.1 и 1.2 производная по Фреше отображения F_D в точке $\sigma=0$ совпадает с оператором T_D, который является изоморфизмом. Поэтому для любого достаточно малого числа $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что образ шара $\|\sigma\|_\theta<\delta$ при отображении F_D накрывает шар $\|s\|_\theta<\varepsilon$. При $\theta<1/2$ пространство l_D^θ совпадает с пространством l_2^θ. Для данного $\mathbf{s}=\{s_k\}\in\Omega^\theta$ рассмотрим последовательность

$$\mathbf{s}^n=\{0,0,\dots,0,s_n,s_{n+1},\dots\},$$

выбрав число n так, чтобы $\|\mathbf{s}^n\|_\theta<\varepsilon$. Тогда найдется единственная функция $\sigma_n\in W_2^\theta$, образ $F(\sigma_n)$ которой совпадает с $\mathbf{s}^n$. Применив лемму 3.1 $(n-1)$ раз, построим функцию $\sigma\in\Gamma^\theta\subset W_{2,\mathbb{R}}^\theta$, для которой $F\sigma=\mathbf{s}$. Это и означает, что образ отображения F содержит Ω^θ. Теперь при $\theta\geqslant 1/2$ доказательство завершается с помощью приема, примененного в доказательстве Теоремы 2.1 Лемма доказана. $\square$

Лемма 3.3. *При любых $\theta\geqslant 0$ отображение $F:\Gamma^\theta\to\Omega^\theta$ инъективно.*

Доказательство. Инъективность этого отображения при $\theta=0$ (а тогда при всех $\theta\geqslant 0$) доказана в работе Гринива и Микитюка [**19**]. Отметим также, что инъективность следует из формулируемой ниже Леммы 3.6 (для доказательства нужно повторить рассуждения из Леммы 6 работы авторов [**45**]). Лемма доказана. $\square$

Обозначим через $\widehat{\Omega}^\theta$ множество последовательностей $\{s_k\}_{k=1}^\infty\in l_D^\theta$, для которых числа $\lambda_k=(s_k+k)^2$ вещественны. Повторив рассуждения, проведенные перед доказательством теоремы 2.2, из Лемм 3.2 и 3.3 получаем аналог Теоремы 2.2.

Теорема 3.4. *При любых $\theta\geqslant 0$ отображение $F_D:W_{2,\mathbb{R}}^\theta/\{1\}\to\widehat{\Omega}^\theta$ есть биекция. В частности, числа $\{\lambda_k\}_1^\infty$ и $\{\alpha_k\}_1^\infty$ являются собственными значениями и нормировочными числами оператора L_D, порождаемого функцией $\sigma\in W_{2,\mathbb{R}}^\theta$, если и только если последовательность $\{\lambda_k\}$ строго монотонна, числа $\{\alpha_k\}$ положительны и $\{s_k\}_1^\infty\in l_D^\theta$.*

Из сформулированного утверждения следует также, что отображение $F_D : \Gamma^\theta \to \Omega^\theta$ есть биекция. Отметим, что при натуральных $\theta = 1, 2, \dots$ аналог Теоремы 3.4, сформулированный на другом языке, имеется в книге Фрайлинга и Юрко [**11**].

Аналитичность и явный вид производной по Фреше дает следующая теорема.

Теорема 3.5. *Пусть $\theta \geqslant 0$ и $\sigma \in \Gamma^\theta$. Тогда найдется комплексная окрестность $U \in W_2^\theta$ точки σ, такая, что отображение $F : U \to l_D^\theta$ является вещественно аналитическим. В этой окрестности отображение $\Phi_D = F_D - T_D : U \to l_D^\tau$, где τ определено в Теореме 1.3, также является вещественно аналитическим. Производная в точке $\sigma \in U$ определяется равенством*

$$F_D'(\sigma)f = \left\{ (\varphi_k(x), \overline{f(x)}) \right\}_{k=1}^{\infty}, \tag{3.7}$$

где

$$\varphi_{2k-1}(x) = 2\alpha_k\lambda_k \frac{d}{d\lambda}(z(x,\lambda)z'(x,\lambda))|_{\lambda=\lambda_k}, \quad \varphi_{2k}(x) = -\frac{y_k'(x)y_k(x)}{\alpha_k\sqrt{\lambda_k}}, \qquad k = 1, 2, \dots. \tag{3.8}$$

Здесь $f \in W_2^\theta$ — функция, на которую действует оператор $F_D'(\sigma) : W_2^\theta \to l_D^\theta$, $y_n = y(x, \lambda_n)$ — собственные функции оператора L_D, нормированные условиями $y^{[1]}(0, \lambda_n) = \sqrt{\lambda_n}$, а $z(x, \lambda)$ — решение уравнения $-y'' + \sigma'(x)y = \lambda y$ с начальным условием $z(\pi, \lambda) = 0$, нормированное условием $\int_0^\pi z^2(x,\lambda)dx = \frac{1}{\lambda}$. Утверждение об аналитичности (обычной) сохраняется, если условие $\sigma \in \Gamma^\theta$ заменить условием $\sigma \in W_{2,\mathbb{R}}^\theta$ и потребовать, чтобы нуль не был собственным значением оператора L_D.

Доказательство. Локальная дифференцируемость отображения F_D доказана в § 6 нашей работы [**47**]. В этой же работе приведены явные формулы для производной по Фреше, но они менее удобны, нежели (3.8). Переход от старых формул к новым требует некоторой технической работы, см. [**48**]. □

Лемма 3.6. *Система функций $\{\varphi_k\}_1^\infty$, определенная равенствами* (3.8), *является базисом Рисса в пространстве $L_2(0, \pi)/\{1\}$. Биортогональная к ней система имеет вид*

$$\psi_{2k-1}(x) = \frac{2}{\alpha_k^2} y_k^2(x), \qquad \psi_{2k}(x) = -\frac{2\sqrt{\lambda_k}}{\alpha_k}\frac{d}{d\lambda}\left(y^2(x,\lambda)\right)|_{\lambda=\lambda_k} \quad k = 1, 2, \dots, \tag{3.9}$$

а потому также является базисом Рисса.

Доказательство соотношений $(\varphi_k(x), \psi_n(x)) = \delta_{kn}$ при $k \neq n$ проводится так же, как в Лемме 6 работы авторов [**47**]. При $k = n$ проверка равенств усложняется, см. [**48**]. □

Доказательства следующих двух теорем получаются дословным повторением доказательств Теорем 2.6 и 2.11 соответственно.

Теорема 3.7 *Пусть $\theta \geqslant 0$. Для каждой точки $\mathbf{y}_0 \in \Omega^\theta = F_D(\Gamma^\theta)$ существует ее комплексная окрестность $U(\mathbf{y}_0)$, в которой определено обратное отображение $F_D^{-1}(\mathbf{y})$ и в которой это отображение имеет комплексную производную по Фреше. Эта производная имеет вид*

$$\left(F_D^{-1}\right)'(\mathbf{y}) = (F_D')^{-1}(\mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{\infty} s_k\psi_k(x), \qquad \mathbf{y} = (s_1, s_2, \dots).$$

Здесь $\{\psi_k(x)\}_1^\infty$ — система, биортогональная к системе (3.8).

Теорема 3.8. *Утверждение Теоремы 2.12 сохраняет силу, если отображение $F = F_B$ и множество $\Omega^\theta(r,h) = \Omega^\theta_B(r,h)$ в ее формулировке заменить на F_D и $\Omega^\theta_D(r,h)$ соответственно.*

Авторы благодарят проф. Р. О. Гринива за прочтение рукописи работы и полезные замечания.

Список литературы

[1] Albeverio S, Hryniv R, Mykytyuk Ya, *Inverse problems for Sturm–Liouville operators in impedance form*// J. Functional Analysis **222** (2005), 147-177.

[2] Алексеев А.А. *Устойчивость обратной задачи Штурма-Лиувилля на конечном интервале*// Докл. Акад. наук СССР. Т. **287**. (1986). С.11-13.

[3] Ambarzumyan V.A. *Uber eine Frage der Eigenwerttheorie*// Z.Phys V.**53** (1929). C. 690–695.

[4] Borg G. *Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe. Bestimmung dr Differentialgleichung durch die Eigewerte.*// Acta Math. 78, 1946, 1-96.

[5] Богачев В.И., Смолянов О.Г. *Действительньный и функциональный анализ* , Ижевск, РХД, 2009.

[6] Deift P., Trubowitz E. *Inverse scattering on the line*// Comm. Pure Appl. Math., V. 32, 1979, 121–251.

[7] Джаков П., Митягин Б.С. *Зоны неустойчивости для периодического одномерномего оператора Шредингера и Дирака*// Успехи матем. наук. Т. **61**, № 4. 2006. С. 77-182.

[8] Djakov P, Mityagin B *Fourier method for one dimensional Schrödinger operators with singular periodic potentials*// arXiv:0710.0237v1

[9] Фаддев Л.Д. *Обратная задача квантовой теории рассеяния.* // Успехи матем. наук. Т. **14** (1959). С. 57-119.

[10] Фаддев Л.Д. *Свойства S-матрицы одномерного уравнения Шредингера* Труды матем.ин-та Стеклова Т. **73** (1964). С. 314-336.

[11] Freiling G. and Yurko V., *Inverse Spectral Problems.* Nova Sci. Publ. Corporation. 2005.

[12] Гасымов М.Г., Левитан Б.М. *Определение дифференциального уравнения по двум спектрам.* // Успехи матем. наук. Т. **19**. № 2. (1964). С. 3-63.

[13] Гельфанд И. М., Левитан Б. М. *Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции*// Известия Акад. Наук СССР. Сер. Матем., Т. **15**, № 4. 1951. С. 309-360.

[14] Gesztesy F. *A Festschrift in Honor of Barry Simon's 60th Birthday. Ergodic Shrödinger Operators, Singular Spectrum, Orthogonal Polynomials, and Inverse Spectral theory* // Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, V.76, part 2 (eds. F.Gesztesy, P. Deift, C. Galvez, P. Perry, and W. Schlag), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, 741–820. ArXiv 1002.0388v1

[15] Hald O.H. *The inverse Sturm-Liouville problem with symmetric potentials*// Acta Math. **141** (1978). No 3-4. P. 263-291.

[16] Hitrik M. *Stability of the inverse problem in potential scattering on the real line*// Commun. PDE. V. **25** (2000). C. 925-955.

[17] Hochstadt H. *The inverse Sturm–Liouville problem*// Comm. Pure Appl. Math.**26**. (1973). P.715–729.

[18] Hryniv R.O., Mykytyuk Ya.V. 1D Schrödinger operators with singular periodic potentials// *Methods Func. Anal. Topol.*, V. 7 (2001), № 4, 31–42. (arXiv: math.SP/0109129 v1 12 Sep 2001).

[19] Hryniv R.O., Mykytyuk Ya.V. Inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators with singular potentials// *Inverse Problems*, V.**19** (2003). 665–684.

[20] Hryniv R.O., Mykytyuk Ya.V. Inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators with singular potentials, II. Reconstruction by two spectra. // *Functional Analysis and its Applications*, V. Kadets and W. Zelazko, eds., North-Holland Mathematical Studies, V. 197, 97–114, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 2004.

[21] Hryniv R.O., Mykytyuk Ya.V. Transformation operators for Sturm–Liouville operators with singular potentials.// Math. Phys. Anal. Geom., V.7 (2004), 119–149.

[22] Hryniv R. O., Mykytyuk Ya. V. *Eigenvalue asymptotics for Sturm–Liouville Operators with Singular Potentials* // J.Funct. Anal. **238**, No 1, 27-57 (2006).

[23] Hryniv R.O., Mykytyuk Ya.V. Inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators with singular potentials. IV. Potentials in the Sobolev space scale.// Proc. Eddinburg Math. Soc. (2) **49** (2006), no 2, 309-329.

[24] Коротяев Е.Л., Челкак Д.С. *Обратная задача Штурма-Лиувилля со смешанными краевыми условиями*// Алгебра и Анализ 21 (2009). C.114-137.

[25] Крейн М.Г. *Решение обратной задачи Штурма-Лиувилля.* Докл. Акад. наук СССР. Т. **76**. 1951. С. 21–24.

[26] Крейн М.Г. *О методе эффективного решения обратной кравевой задачи*// Докл. Акад. наук СССР. Т. **94**. (1954). С. 987–990.

[27] Levinson N, *The inverse Sturm–Liouville problem*// Mat.Tidsskr. B., 1949, 25-30.

[28] Levitan B. M. *Об определении дифференциального уравнения Штурма–Лиувилля по двум спектрам*// Изв. Акад. Наук СССР. Сер. Матем. **28**. № 1. (1964). С.63-78.

[29] Levitan B. M. *Обратные задачи Штурма-Лиувилля.* Москва. Наука. 1984.
Ser.2, V. 68, 1968, 1–20.

[30] Maclaughlin J.R. *Stability theorems for two inverse problems*// Inverse problems, V. 9 (1988). 529-540

[31] Malamud M.M. *Spectral analysis of Volterra operators and inverse problems for systems of ordinary differential equations*// SfB Preprint No 269, 85 p. Berlin, June 1997.

[32] Марченко В.А. *Некоторые задачи в теории дифференциального оператора второго порядка*// Докл. акад. наук СССР. **72** (1950). С.457-460.

[33] Марченко В.А. *Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка*// Труды Моск. Матем. об.ва. Т.**1** (1951). С 327-420.

[34] Марченко В.А. *Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения*// Киев. Наукова Думка. 1977.

[35] Марченко В.А., Маслов К.В. *Устойчивость восстановления оператора Штурма-Лиувилля по спектральной функции.*// Матем. Сборник. Т. **81**:4 (1970). С.525-551.

[36] Марченко В.А., Островский И.В. *Характеризация спектра оператора Хилла*// Матем. Сборник. Т. **97**:4 (1975). С. 540-606.

[37] Марченко В.А., Островский И.В. *Аппроксимация периодических потенциалов конечнозонными*// Вестник Харьковского ун-та № 205. Прикл. матем. и механика. вып. 45(1980). С. 4-40.

[38] Marletta M. and Weikard R. *Weak stability for an inverse Sturm-Liouville problem with finite spectral data and complex potential*// Inverse Problems. V. **21** (2005). P. 1275-1290.

[39] Mizutani A. *On the inverse Sturm-Liouville problem*// J. Fac. Sci. Univ. Tokio. Sec.IA. Math 31 (1984). 319-350.

[40] Pöschel J. and Trubowitz E., *Inverse Spectral Theory* Orlando, Acad. Press, 1987.

[41] Рябушко Т.И. *Устойчивость восстановления оператора Штурма-Лиувилля по двум спектрам*// Теория функций, функц. анализ и его прилож. Т. **18** (1973). С. 176-185. Харьков.

[42] Рябушко Т.И. *Оценки нормы разности двух потенциалов граничной задачи Штурма-Лиувилля.*// Теория функций, функц. анализ и его прилож. Т. **39** (1983). С. 114-117. Харьков.

[43] Савчук А.М., Шкаликов А.А. Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами. // Матем. Заметки. Т. **66**. 1999. No. 6. С. 897–912.

[44] Савчук А.М., Шкаликов А.А. Операторы Штурма–Лиувилля с потенциалами – распределениями.// Труды Московского матем. общества. Т. **64** (2003), С. 159–219.

[45] Savchuk A.M., Shkalikov A.A. Inverse problem for Sturm–Liuville operators with distribution potentials: Reconstruction from two spectra//, Russian Journal of Math. Physics. V.**12** (2005), 507–514.

[46] Савчук А.М., Шкаликов А.А. О собственных значениях оператора Штурма–Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева. // Матем. Заметки., 2006, V.80, No. 6, P. 864–884.

[47] Савчук А.М., Шкаликов А.А. О свойствах отображений, связанных с обратными задачами Штурма-Лиувилля // Труды матем.ин-та им. В.А.Стеклова. Т. **260** (2008). С.227-247.

[48] Савчук А.М., Шкаликов А.А. *С*войства отображения, связанного с восстановлением оператора Штурма-Лиувилля по спектральной функции. Равномерная устойчивость в шкале соболевских пространств.// arXiv:1010.5344.

[49] Тихонов А.Н. *О единственности решения задачи электропроводимости*// Докл. Акад. наук СССР. Т.**69** (1949).С. 797-800.

[50] Юрко В.А. *Об устойчивости восстановления оператора Штурма-Лиувилля.*// Дифференциальные уравнения и теория функций. Т.**3** (1980). С.113-124. Саратовский университет. Саратов.

А.М.Савчук, МГУ имени М.В.Ломоносова, механико-математический ф-т, Ленинские Горы, Москва, 119992. artem_savchuk@mail.ru

А.А.Шкаликов, МГУ имени М.В.Ломоносова, механико-математический ф-т, Ленинские Горы, Москва, 119992. ashkalikov@yahoo.com